12 - лекция

12 Біртекті дифференциалдық теңдеулер. Сызықты дифференциалдық теңдеулер.

12.1 Біртекті дифференциалдық теңдеулер

Анықтама. $\varphi(x;y)$ функциясы x пен y бойынша α-шы ретті біртекті функция деп аталады, егер кез келген t үшін: $\varphi(tx;ty)=t^{\alpha}\varphi(x;y)$ теңдігі орындалатын болса.

Анықтама. Егер $M(x;y)$ және $N(x;y)$ - бірдей ретті біртекті функциялар болса, онда $M(x;y)dx+N(x;y)dy=0$ теңдеуі біртекті дифференциалдық теңдеу деп аталады.

Егер $f(tx;ty)=f(x;y)$, яғни, $\alpha=0$, онда

$$y'=f(x,y) \qquad (12.1)$$

теңдеуі біртекті болады.

Біртекті дифференциалдық теңдеу айнымалыларды ауыстыру көмегімен айнымалылары ажыратылатын дифференциалдық теңдеуге келтіріледі:

$$u=\frac{y}{x}\Rightarrow y=ux,\ y'=u+xu' \text{ немесе } dy=udx+xdu. \qquad (12.2)$$

1- мысал: $y'=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$

$$u=\frac{y}{x}\Rightarrow y=ux,\ y'=u+xu'$$

$$u+xu'=\frac{1}{u}+u$$

$$xu'=\frac{1}{u}$$

$$x\cdot\frac{du}{dx}=\frac{1}{u}$$

$$x\cdot\frac{du}{dx}\cdot dx=\frac{1}{u}\cdot dx$$

$$x\cdot du=\frac{1}{u}\cdot dx$$

$$u\cdot du=\frac{1}{x}\cdot dx$$

$$\int udu=\int\frac{dx}{x}$$

$$\frac{u^2}{2}=\ln|x|+\ln C$$

$$u^2=2\ln|x|+\ln C$$

Жауабы: $\frac{y^2}{x^2}=\ln\left|x^2\right|+\ln C$

12.2. Бірінші ретті сызықты дифференциалдық теңдеулер

Анықтама. Егер дифференциал теңдеу ізделінді функция мен оның туындысы бойынша сызықты болса, ондай теңдеуді сызықты дифференциал теңдеу деп атаймыз.

Бірінші ретті сызықты дифференциал теңдеуді мына түрде жазуға болады:

$$y' + P(x)y = Q(x) \qquad (12.2)$$

$$y' + P(x)y = 0, \qquad (12.2.1)$$

(12.2) – біртектес емес, ал (12.2.1) – біртектес дифференциал теңдеу деп аталады.

(12.2) сызықты дифференциал теңдеуін ***Бернулли әдісін*** қолданып , интегралдауға болады. Екі белгісіз функция *u(x), v(x)* енгіземіз және

y=u(x)v(x) ***(Бернулли ауыстыруы)***

деп аламыз. Онда

$$y' = u'v + uv'.$$

y және y' өрнектерін (3) теңдеуіне қоя отырып,

$$u'v + uv' + P(x)uv = Q(x) \text{ немесе}$$

$$(v' + P(x)v)u + u'v = Q(x). \qquad (12.2.2)$$

теңдеуін аламыз. Жақшаның ішіндегі өрнекті $v' + P(x)v = 0$ десек, бұл айнымалысы ажыратылатын дифференциалдық теңдеу. Осы теңдеуді шешіп, v-ны табуға болады. Енді жақшаның ішіндегі өрнекті нөлге тең деп алғандықтан, (12.2.2) теңдеуі мына түрге келеді:

$$u'v = Q(x).$$

Бұл теңдеуге жоғарыда табылған v-ны қойсақ, бұл да айнымалылары ажыратылатын теңдеу болады, бұл жерден u-ды табамыз. Табылған u мен v-ны Бернулли ауыстыруына қоятын болсақ, берілген теңдеудің жалпы шешімі шығады.

13 - лекция
13 Бернулли теңдеуі және толық дифференциалды теңдеулер.

13.1 Бернулли теңдеуі

Анықтама .

$$y' + P(x)y = Q(x)\cdot y^{\alpha}$$

түріндегі дифференциалдық теңдеу **Бернулли теңдеуі** деп аталады, мұндағы $\alpha \neq 0, \alpha \neq 1$, $P(x), Q(x)$- қандай да бір кесіндіде үзіліссіз функциялар. Бұл теңдеу $u = y^{1-\alpha}$ айнымалысын ауыстыру көмегімен сызықты теңдеуге келтіріледі

13.1 мысал. $y' + \frac{1}{x}y = -x\cdot y^2$ Бернулли теңдеуін сызықты теңдеуге келтір.

Шешуі: $y'\cdot\frac{1}{y^2} + \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y} = -x$

$y^{-2}y' + x\cdot y^{-1} = -x$

$y^{-1} = z \qquad -y^{-2}\cdot y' = z'$

$-z' + \frac{1}{x}\cdot z = -x \qquad\qquad z' - \frac{1}{x}\cdot z = x$ Сызықты диф. теңдеу

Алмастыру: $z = u\cdot v \quad z' = u'v + uv'$

$$u'v + uv' - \frac{1}{x}\cdot uv = x$$

$$u'v + (uv' - \frac{1}{x}\cdot uv) = x$$

$$u'v + (uv' - \frac{1}{x}\cdot uv) = x$$

1) $v' - \frac{1}{x}\cdot v = 0 \qquad\qquad$ 2) $u'v = x$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{x}v$$

$$\frac{dv}{v} = \frac{1}{x}dx$$

$$\ln v = \ln x$$

$$v = x$$

$$u'x = x$$
$$u' = 1$$
$$u = x + c$$

$$y^{-1} = z = uv = x(x + c)$$

$$\frac{1}{y} = x^2 + cx$$

Жалпы шешім: $y = \dfrac{1}{x^2 + cx}$

Әдебиеттер

1. Хисамиев Н.Г. Тыныбекова С.Д. Конырханова А.А. Математика II. ШҚМТУ, 2008
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. Т.1,2 М.:Наука, 2009г.
3. ЖҮТ Айдос Е.Ж. Жоғары математика. 1,2,3 бөлім Бастау, 2008

4 Сборник ИДЗ по высшей математике. Под редакцией Рябушко А.П., ч.1,2,3 Минск, «ВШ», 2002г.